www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ECOLES SUPERIEURES

SESSION 1989

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

PREMIERE INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans cette épreuve comme dans toutes celles qui suivront, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

»»»»»»»»»»»O«««««««««««

EXERCICE N° 1

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien muni d'un repère orthonormé on désigne par $M = (x , y)$ le point courant.

1 – Déterminer l'enveloppe E de la famille des droites définies par l'équation

$$x \cos\theta + y \sin\theta = \sin 2\theta \quad , \quad (\theta \in \mathbb{R}) .$$

2 – Tracer cette enveloppe E .

3 – Soit la développée Γ de la courbe E .

a – Montrer que le tracé de Γ se déduit du tracé de E par une transformation géométrique simple que l'on précisera .

b – Tracer Γ .

c – Trouver une représentation paramétrique de Γ .

4 – Calculer la longueur de E .

5 – Calculer l'aire délimitée par E .

EXERCICE N° 3

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien muni d'un repère orthonormé , on désigne par $M = (x , y)$ le point courant.

On pourra identifier ce point au nombre complexe $x + iy$.

Soit deux nombres positifs α et p $(0 < \alpha < p)$.

On considère les points $K = (-\alpha , 0)$, $A = (\alpha , 0)$ et $P = (p , 0)$ ainsi que le cercle Γ : $x^2 + y^2 - 2my - \alpha^2 = 0$, avec $m \in \mathbb{R}$.

Enfin on désigne par B et C les points de contact des tangentes menées de P au cercle Γ .

1 – Donner l'équation de l'ensemble des droites OB et OC .

2 – Soit β et γ les affixes de B et C . Calculer $\beta\gamma - \alpha^2$.

3 – Soit un second repère orthonormé d'origine K . On désigne maintenant par a , b , c , les affixes de A , B et C dans ce nouveau repère.

Calculer : $\dfrac{2}{a} - \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}$

T.S.V.P.

EXERCICE N° 2

Soit un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ euclidien ayant pour matrice dans la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -7 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 — Donner le polynôme caractéristique de u et, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le rang de $u - \lambda\,Id$, où Id représente l'application identique de $\mathbb{R}^3$

Dans les parties suivantes, on explicitera les endomorphismes obtenus par leurs matrices explicitées sous forme de polynômes en A.

2 — On pose $S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Montrer que $S_n(u)$ converge vers un endomorphisme S(u).

NOTA : *On dit qu'une suite d'endomorphismes $S_n(u)$ converge vers l'endomorphisme S(u), quand $n \to +\infty$, si les éléments de la matrice $S_n(U)$ convergent vers des nombres qui sont les éléments de la matrice S(U).*
Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien muni de sa norme canonique on rappelle en outre que la norme d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$, notée $|||u|||$, peut être définie par

$$|||u||| = Sup\,(\,\|u(\vec{x})\|\,) \quad \|\vec{x}\| \leqslant 1.$$

3 — On pose $K_n(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!}$

Montrer que $K_n(u)$ converge vers un endomorphisme K(u).

4 — On définit de même un endomorphisme S(2u).

Calculer S(2u) et 2.S(u) o K(u), où o désigne la composition des applications.

5 — Donner la matrice de l'endomorphisme $S^2(u) + K^2(u)$.

EXERCICE N° 5

Déterminer les ensembles d'entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels le polynôme $P(X) = (X+1)^n + X^n + 1$ est respectivement divisible par $X^2 + X + 1$, $(X^2 + X + 1)^2$ et $(X^2 + X + 1)^3$.

T.S.V.P.

EXERCICE N° 4

Dans $\mathbb{R}^3$ *euclidien muni d'un repère orthonormé* , *on désigne par* $M = (x , y , z)$ le point courant de $\mathbb{R}^3$.

Pour $t \in \mathbb{R} - \{1\}$, on considère la courbe G

$$\begin{cases} x = t\, e^t \\ y = \sin t \\ z = \dfrac{t}{1-t} \end{cases}$$

1 – Donner l'équation du plan osculateur P de G à l'origine ($t = 0$) .

2 – Soit une sphère S_1 de rayon non nul, centrée dans P et tangente à G à l'origine. Donc le centre Ω_1 de S_1 est distinct de l'origine et appartient à la normale principale à G à l'origine.

a) Montrer que l'équation normale de S_1 est définie par

$\varphi_1 (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2\, u (x, y, z) = 0$

où u est une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$ et dont on précisera le noyau.

b) Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de la sphère S_1 à la sphère S_λ dont l'équation est définie par :

$\varphi_\lambda (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda\, u (x, y, z) = 0$?

c) Soit Φ_λ défini, pour $t \in \mathbb{R} - \{1\}$, par

$$\Phi_\lambda(t) = \varphi_\lambda(t\, e^t , \sin t , \frac{t}{1-t})$$

Donner de $\Phi_\lambda (t)$ un développement limité au second ordre par rapport à t , au voisinage de $t = 0$ et montrer qu'existe λ_0 pour lequel ce développement limité est nul.

3 – Soit alors le cercle Γ défini par $\Gamma = S_{\lambda_0} \cap P$.

On désigne par Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 les projections orthogonales de Γ sur les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.

a – Que peut-on dire de Γ_2 ?

b – Donner les cercles osculateurs de Γ_1 et Γ_3 à l'origine.

NOTA : On *rappelle que le cercle osculateur en un point d'une courbe plane est le cercle centré au centre de courbure de la courbe en ce point et passant par ce point (quand le centre de courbure existe).*

»»»»»»»»»»»»O«««««««««««

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail